МАТЕМАТИКА

Методические указания для студентов заочного отделения юридического факультета

Красноярск 2002

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ЮРИДИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

МАТЕМАТИКА

Методические указания для студентов заочного отделения юридического факультета

Красноярск 2002

Составители: Е.С. Быковских,
А.М. Быковских,
О.Г. Проворова

Математика: Метод. указания для студентов заочного отделения юридического факультета /Е.С. Быковских, А.М. Быковских, О.Г. Проворова; Краснояр. гос. ун-т. Красноярск, 2002. 28 с.

Введение.

Математическое образование – важнейшая составляющая фундаментальной подготовки специалистов в различных областях знания. Обусловлено это тем, что математика является не только мощным средством решения прикладных задач, но также и элементом общей культуры.

Цель курса «Математика» – формирование у студентов представления о роли и месте математики в современной цивилизации и в мировой культуре, умения логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и корректно использовать математические понятия и символы для выражения количественных и качественных отношений.

Целью контрольной работы по математике является приобретение навыков применения математического аппарата при решении различных задач. Выполнение контрольной работы предполагает письменное решение задач по одному из десяти вариантов.

Правила выполнения и оформления контрольных работ:

- Номер варианта равен последней цифре номера зачетной книжки студента.
- Если номер зачетки оканчивается цифрой 0, то студент выполняет десятый вариант.
- Из каждого задания выбирается задача с номером соответствующего варианта. Всего в работе должно быть решено 10 задач.
- Контрольная работа выполняется в отдельной тетради, записи должны быть четкими и аккуратными.
- Решение задач следует располагать в порядке номеров, указанных в задании.
- Перед решением задачи необходимо полностью выписать ее условие.
- Решение задач должно быть изложено подробно и аккуратно, объясняйте все действия. При наличии только правильного ответа, без решения, задача не засчитывается.
- Работа оценивается оценками «зачтено» и «не зачтено».
- В случае незачета необходимо заново переделать те задания, на которые указал проверяющий. На зачет необходимо взять с собой обе контрольные работы.

Итоговый контроль – зачет. Он проходит в форме письменной контрольной работы. Целью зачета является проверка знаний и навыков в данной области.

§ 1. Элементы теории множеств

Когда мы начинаем что-то изучать, то прежде всего нужно договориться о языке, на котором это всё изложено. И очень чётко отделять его от обыденного языка.

Математическая структура или, говоря другим языком, разделы математики: арифметика, алгебра, геометрия, исчисление вероятностей, строится следующим образом:

1. **В основу положен некоторый класс объектов.**
2. **Устанавливаются правила работы с этими объектами (операции).**
3. **Выделяются самоочевидные принципы (аксиомы).**

Для получения результатов математика использует особый метод – метод дедуктивного вывода из аксиом.

Природа дедуктивного вывода такова, что она гарантирует истинность заключения, если истинны аксиомы.

1.1. Множества

Обозначения. Обычно множества чего-либо обозначаются заглавными буквами какого-либо алфавита: A, B, C, элементы множества обычно задаются прописными буквами: a, b, c. Запись $a \in A$ читается так: «a принадлежит множеству A или: a есть элемент множества A».

Способы задания:

1. **Непосредственно записать элементы множества**

Пример 1. A={1, 2, 8, 12, 35} – множество состоит из пяти элементов, заданных в фигурных скобках. B={{3,2}, {-1,4}, {12,35}} - множество B состоит из трёх элементов, каждый из которых является множеством.

2. **Указать свойства, которыми обладают все элементы множества**

Пример 2. A – студенты заочного отделения юридического факультета, возраст которых не превышает 25 лет.

Определение 1. Множество, состоящее из конечного числа элементов, конечно.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается: $\varnothing$.

Пусть задано два множества – A и B. Говорят, что B – подмножество A, если все элементы из B принадлежат A.

Будем считать, что A=B, если A является подмножеством B и B является подмножеством A.

Можно сравнивать множества различной природы. Для этого введём определения.

Определение 2. Между множествами A и B установлено взаимно-однозначное соответствие, если каждому элементу A можно по какому-нибудь правилу поставить в соответствие единственный элемент из B и наоборот.

Определение 3. Множество A эквивалентно множеству B, если существует взаимно-однозначное соответствие между ними.

Обозначение. $A \propto B$.

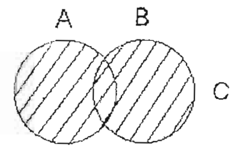
1.2. Операции над множествами

Объединение. Множество C называется объединением множеств A и B, если его элементы принадлежат либо множеству A, либо множеству B. Причём общие элементы считаются один раз.

Обозначение. $C = A \cup B$

Пример 3. A={1, 2, 8, 12, 35}, B={-1, 8, 35, 15}, C={1, 2, 8, 12, 35, -1, 15}.

Для наглядности используют круги (диаграммы) Эйлера-Венна. Объединение множеств можно представить следующим образом:

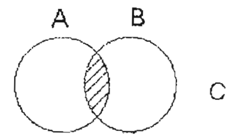


$C = A \cup B$, C - заштрихованная область.

Пересечение. Множество C называется пересечением множеств A и B, если его элементы принадлежат множествам A и B одновременно.

Обозначение. $C = A \cap B$.

Пример 4. A={1, 2, 8, 12, 35}, B={-1, 8, 35, 15}; C={8, 35}.

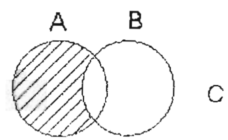


$C = A \cap B$, C – заштрихованная область.

Разность двух множеств A и B есть множество тех элементов A, которые не принадлежат B.

Обозначение. $C = A \setminus B$.

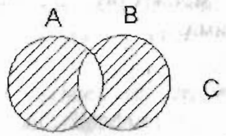
Пример 5. A={1, 2, 8, 12, 35}, B={-1, 8, 35, 15}; C={1, 2, 12}.



$C = A \setminus B$, C - заштрихованная область.

Симметричная разность двух множеств A и B – это множество C вида $C=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

Обозначение. $C=A\Delta B$.



$C=A\Delta B$, C – заштрихованная область

Пример 6. $A=\{1, 2, 8, 12, 35\}$, $B=\{-1, 8, 35, 15\}$; $C=\{1, 2, 12, -1, 15\}$.

Если все рассматриваемые в ходе какого-либо рассуждения множества являются подмножествами некоторого множества U, то это множество называют **универсальным множеством** для этого рассуждения.

Договоримся, что если мы используем диаграмму Венна, то универсальным множеством будет некоторый прямоугольник, на котором множество A обозначено кругом. Через $\overline{A}$ мы будем обозначать дополнение множества A до U.

Задача 1

Пусть заданы множества A и B. Найти: а) $C=A\cup B$; б) $C=A\cap B$; в) $C=A\setminus B$; г) $C=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=A\Delta B$:

1. $A=\{11, 12, 18, 22, 45\}$, $B=\{-11, 18, 45, 25\}$;
2. $A=\{2, 3, 8, 13, 36\}$, $B=\{-0, 8, 36, 16\}$;
3. $A=\{3, 4, 10, 14, 37\}$, $B=\{1, 10, 37, 17\}$;
4. $A=\{4, 5, 11, 15, 38\}$, $B=\{2, 11, 38, 18\}$;
5. $A=\{5, 6, 12, 16, 39\}$, $B=\{3, 12, 39, 19\}$;
6. $A=\{11, 12, 18, 112, 135\}$, $B=\{-11, 18, 135, 115\}$;
7. $A=\{11, 21, 81, 121, 351\}$, $B=\{-11, 81, 351, 151\}$;
8. $A=\{21, 22, 28, 212, 235\}$, $B=\{-21, 28, 235, 215\}$;
9. $A=\{12, 22, 82\ 122, 352\}$, $B=\{-12, 82, 352, 152\}$;
10. $A=\{31, 32, 38, 312, 335\}$, $B=\{-31, 38, 335, 315\}$;

Задача 2

Доказать, используя круги Эйлера-Венна, равенства:

1. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;
2. $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus C$;
3. $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$;
4. $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$;
5. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;
6. $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$;
7. $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$;
8. $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$;
9. $(A\setminus B)\cup(A\cap B)=A$;
10. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

Задача 3

На изображенной таблице показана реакция некоторого числа зрителей на одну телевизионную передачу. Все фигурирующие в таблице категории можно выразить в терминах следующих четырех множеств: M (мужского пола), B (взрослый), Π (понравилось), O (очень).

	Очень понравилось	Понравилось, но не очень	Не понравилось, но не очень	Очень не понравилось
Мужчины	1	3	5	10
Женщины	6	8	3	1
Мальчики	5	5	3	2
Девочки	8	5	1	1

Сколько человек попадает в каждую из следующих категорий:

1. $M\cap B$;
2. $(\overline{\Pi}\cap M)\setminus\overline{M}$;
3. $O\cup(B\cap M)$;
4. $M\cap\overline{B}\cap\overline{\Pi}\cap O$;
5. $\overline{M}\cap B\cap\Pi$;
6. $(M\cap B)\cup(\Pi\cap O)$;
7. $\overline{M\cap B}$;
8. $\overline{M}\cup\overline{B}$;
9. $M\setminus B$;
10. $\overline{M}\setminus(B\cap\Pi\cap\overline{O})$.

§ 2. Элементы комбинаторики

2.1. Основные определения

Комбинаторика – это раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами.

Множества, у которых указан порядок расположения элементов, будем называть **упорядоченными**.

Для упорядоченных множеств множества: {1,2,3,}; {3,1,2,}; {2,3,1} – разные.

Размещением n элементов по k элементов называется упорядоченное множество, состоящее из k элементов; причём два размещения считаются разными, если они отличаются порядком расположения элементов.

Обозначение. Количество способов, которыми можно выбрать из n элементов по k, обозначается как A_n^k и вычисляется по следующей формуле:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1). \qquad (1)$$

Пример 1. В группе 30 человек. Необходимо выбрать старосту, его заместителя и профорга. Сколько существует способов это сделать?

Решение. Нужно из 30 человек выбрать 3, причём тройки различаются составом и расположением человек (элементов). Значит, нужно посчитать число размещений из 30 по 3. В данном случае n=30, k=3. По формуле (1) A_{30}^3 = 30·29·28=24 360 способов.

Перестановки. Перестановками из n элементов называются такие размещения из n элементов по n, которые различаются только порядком расположения элементов.

Обозначение. Число перестановок из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле (1):

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)...2\cdot 1 = n! \qquad (2)$$

Число перестановок из n элементов равно произведению всех целых чисел от 1 до n. В математике это произведение принято обозначать значком n! (читается как эн факториал).

Пример 2. Порядок выступления 7 участников конкурса определяется жребием. Сколько различных вариантов жеребьёвки возможно?

Решение. Каждый вариант жеребьёвки отличается только порядком участников конкурса, значит, нужно подсчитать число перестановок из 7 элементов. По формуле (2) P_7=7!=1·2·3·4·5·6·7=5 040 вариантов.

Сочетания. Сочетания из n элементов по k – это размещения, которые отличаются хотя бы одним элементом.

При подсчёте числа сочетаний мы полагаем одинаковыми те наборы из k элементов, которые отличаются порядком расположения.

Обозначение. Число сочетаний из n элементов по k обозначается C_n^k и считается по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (3)$$

Пример 3. В группе 30 человек. Необходимо 3 человека отправить на дежурство. Сколько есть вариантов назначения на дежурство?

Решение. Каждый вариант назначения должен отличаться хотя бы одним человеком. Число вариантов равно числу сочетаний из 30 человек по 3. Считаем по формуле (3)

$$C_{30}^3 = \frac{30!}{3!(30-3)!} = \frac{30!}{3!\cdot 27!} = \frac{28\cdot 29\cdot 30}{1\cdot 2\cdot 3} = 4\ 060 \text{ вариантов.}$$

Задача 4

Посчитать A_n^k; C_n^k; P_n:

1) n=10, k=4;
2) n=11, k=5;
3) n=12, k=6;
4) n=13, k 7;
5) n=14, k=8;
6) n=15, k=9;
7) n=16, k=10
8) n=17, k=11;
9) n=18, k=12;
10) n=19, k=13.

Задача 5

Сколько различных перестановок можно составить из букв данного слова?

1) шарада;
2) колокол;
3) забава;
4) сорока;
5) золото;
6) корова;
7) сосна;
8) бассейн;
9) толокно;
10) заварка.

Задача 6

Одна из воюющих сторон захватила в плен n солдат, а вторая m. Сколькими способами можно обменять k военнопленных?

1) n=14, m=16, k=7;
2) n=15, m=17, k=8;
3) n=16, m=18, k=9;
4) n=17, m=19, k=10;
5) n=18, m=20, k=11;
6) n=19, m=21, k=12;
7) n=20, m=22, k=13;

8) $n=21,\ m=23,\ k=14;$
9) $n=22,\ m=24,\ k=15;$
10) $n=23,\ m=25,\ k=16.$

§ 3. Теория вероятностей. Основные понятия

3.1. Случайные события

Опыт, эксперимент, наблюдение какого-либо явления называются **испытанием.** Испытаниями, например, являются бросание монеты, выстрел из винтовки, бросание игральной кости (кубика с нанесенным на каждую грань числом очков – от одного до шести).

Результат (исход) испытания называется **событием.** Событиями являются: выпадение герба или выпадение цифры, попадание в цель или промах, появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости.

Все события можно разделить на три вида: **достоверные, невозможные и случайные**.

Достоверным называют такое событие, которое происходит при каждом испытании.

Невозможным называют событие, которое не может произойти ни при одном испытании.

Случайным называют событие, которое в данном испытании может произойти, а может и не произойти.

Пример 1. В урне имеются шары только синего и красного цвета. Наугад вынимают один шар (это испытание). Событие, состоящее в том, что вынут либо синий, либо красный шар – достоверное. Событие, состоящее в том, что вынут шар белого цвета, – невозможное. Событие «вынут шар красного цвета» (или событие «вынут шар синего цвета») является случайным.

Случайные события будем обозначать большими буквами латинского алфавита A, B, C и т.д.

Случайные события $A_1, A_2, ..., A_n$ называются **несовместными,** если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Случайные события $A_1, A_2, ..., A_n$ называются **единственно возможными,** если в результате испытания происходит какое-либо одно и только одно из этих событий.

Случайные события $A_1, A_2, ..., A_n$ называются **равновозможными**, если в результате испытания ни одно из них не имеет объективно большую возможность появления, чем другие.

Пример 2. Игральную кость бросают один раз. События $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ состоят, соответственно, в выпадении чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Эти события являются несовместными, единственно возможными и равновозможными.

Каждое испытание можно описать с помощью событий, которые являются несовместными и единственно возможными. Эти события называются элементарными исходами испытания или **элементарными событиями**.

3.2. Классическое определение вероятности

В мере случайных явлений, хотя они и случайные, имеются закономерности, которые изучают с помощью понятия вероятности.

Вероятность события A – число $P(A)$, характеризующее возможность появления этого события.

Пусть данное испытание может иметь n равновероятных элементарных исходов. Если событие A происходит в результате одного из m равновероятностных исходов (такие исходы называются благоприятными событию A), то **вероятностью** события A называют отношение m к n:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Пример 3. Вероятность появления четного числа очков при одном бросании игральной кости равна $1/2$, так как число всех исходов шесть, а число исходов, благоприятных событию A – три.

Свойства вероятности.

1. Вероятность любого события заключена между нулем и единицей $0 \le P(A) \le 1$.
2. Вероятность достоверного события равна единице.
3. Вероятность невозможного события равна нулю.

Иногда вероятность указывают в процентах. Например, $P(A) = 0{,}5$ или 50 %.

Типовая задача 7 (пример). В урне 10 красных и 8 синих шаров. Наугад вынимают один. Какова вероятность того, что вынут шар красного цвета?

Решение. Это испытание имеет 18 равновозможных исходов. Каждый исход означает выбор одного шара. Пусть событие A означает выбор красного шара. Число исходов, благоприятных событию A, равно 10. Итак, $m=10$, $n=18$.

Следовательно, $P(A) = \dfrac{10}{18} = \dfrac{5}{9}$.

При решении задач на вычисление вероятностей возникают трудности, связанные с определением числа тех или иных исходов испытания. В таких случаях используются комбинаторные формулы.

Типовая задача 7 (пример). В библиотеке на полке стоит 9 книг в твердом переплете и 6 в мягком. С полки берут 2 книги. Какова вероятность того, что обе книги окажутся в твердом переплете?

Решение. Число равновозможных исходов испытания $n = C_{15}^2$. Каждый исход означает выбор пары книг. Событие A означает выбор пары книг в твердом переплете. Число исходов, благоприятных событию A, $m = C_9^2$

Следовательно, $P(A) = \frac{C_9^2}{C_{15}^2} = \frac{12}{35} = 0{,}342$.

Задача 7

1. Из стандартной колоды карт (36 карт) вынимают одну карту. Какова вероятность того, что это дама пик?
2. Монета брошена два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится «герб».
3. Из стандартной колоды карт (36 карт) выбирают две. Какова вероятность того, что это будут два туза?
4. Игральная кость брошена два раза. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков равна 11?
5. Найти вероятность того, что четырехзначный номер случайно встреченного автомобиля состоит из одинаковых цифр (номер 0000 считается возможным)?
6. В урне 8 белых, 5 синих, 2 красных шара. Какова вероятность того, что вынутый шар будет синего или красного цвета?
7. Программа экзамена содержит 30 вопросов. Студент знает 20 из них. Каждому студенту предлагают 2 вопроса, которые выбирают случайным образом. Положительную оценку ставят в том случае, если студент правильно ответил на оба вопроса. Какова вероятность успешной сдачи экзамена?
8. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.
9. В конверте среди 100 фотографий находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 10 фотографий. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.
10. Буквы русского алфавита написаны на карточках разрезной азбуки. Три карточки вынимают наугад одну за другой и укладывают на стол в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово «оса».

3.2. Операции над событиями. Независимые и зависимые события

Суммой событий A и B называется событие $C = A + B$, состоящее в наступлении, по крайней мере, одного из событий A или B. Например, если событие A – обнаружен преступник Рыков, а событие B – обнаружен преступник Угрюмов, то событие $C = A + B$ означает, что обнаружен, по меньшей мере, один из двух преступников. Аналогично определяется сумма большего числа событий.

Произведением событий A и B называется событие $C = AB$, состоящее в том, что в результате испытания произошли и событие A, и событие B. В нашем случае событие $C = AB$ состоит в том, что обнаружены оба преступника.

Два события A и B называются **противоположными**, если в данном испытании они несовместимы и одно из них обязательно происходит. То есть, если событие A не произошло, то говорят, что произошло противоположное событие «не A». Обозначается $\overline{A}$. В нашем случае событие $B = \overline{A}$ состоит в том, что преступник Рыков не обнаружен.

Теорема 1. *Для совместных событий.* Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятности этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Для несовместных событий их совместное наступление есть невозможное событие, а вероятность его равна нулю, следовательно, вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Пример 4. В учебной группе 25 курсантов, из которых 5 курсантов – отличники; 10 курсантов – хорошисты; 10 курсантов имеют удовлетворительные оценки. Какова вероятность, что наугад вызванный курсант отличник или хорошист?

Испытание, в нашем примере, это вызов курсанта отвечать. Событие A – вызванный курсант оказался отличником, событие B – вызванный курсант оказался хорошистом. События несовместны, поэтому, используя классическое определение вероятности и формулу для вероятности суммы несовместных событий, мы будем иметь

$$P(A) = \frac{5}{25}, P(B) = \frac{10}{25}, \; P(A + B) = \frac{5}{25} + \frac{10}{25} = 0{,}6.$$

События A и B называются **независимыми**, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошло или нет другое событие. Вероятности независимых событий называются **безусловными**.

События A и B называются **зависимыми**, если вероятность каждого из них зависит от того, произошло или нет другое событие. Вероятность события

B, вычисленная в предположении, что другое событие A уже осуществилось, называется **условной** вероятностью. Обозначается $P(B/A)$.

Пример 5. Два стрелка стреляют в одну и ту же цель. Пусть A – попадание в цель первым стрелком, B – вторым стрелком. События A и B независимы.

Пример 6. В урне 2 белых и 3 черных шара. Пусть испытание состоит в том, что сначала вынимают один шар и, не опуская его обратно, вынимают еще один шар. Какова вероятность, что оба вынутых шара черные?

Событие A – появление первого черного шара, событие B – появление второго черного шара. Вероятность события B зависит от того, произошло или нет событие A (число черных шаров в урне уменьшилось после первого извлечения).

Теорема 2. *Для независимых событий.* Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Для зависимых событий. Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого:

$$P(AB) = P(A)P(B/A).$$

Типовая задача 8 (пример). Два стрелка стреляют в одну и ту же цель, причем вероятность поражения цели первым стрелком 0,8, а вторым стрелком - 0,5. Оба стрелка стреляют по команде (то есть одновременно) один раз. Какова вероятность, что цель будет поражена хотя бы одним стрелком?

Решение. Пусть A – попадание в цель первым стрелком, B – вторым стрелком, $A+B$ – поражение цели хотя бы одним стрелком, AB – поражение цели обоими стрелками. По формуле имеем

$$P(A+B) = 0{,}8 + 0{,}5 - P(AB).$$

В данном примере события A и B независимы, поэтому

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}8 \times 0{,}5 = 0{,}4.$$

Тогда $P(A+B) = 0{,}9$.

Типовая задача 8 (пример). Студент пришел на экзамен, изучив только 20 из 25 вопросов программы. Экзаменатор задал студенту два вопроса. Какова вероятность того, что студент ответит на все два вопроса?

Решение. Обозначим события: A – студент знает оба вопроса, A_1 – студент знает первый вопрос, A_2 - студент знает второй вопрос. Искомое событие A состоит в совместном наступлении событий A_1 и A_2. События A_1, A_2 – зависимые. Тогда $P(A_1) = 20/25$; $P(A_2/A_1) = 19/24$. Действительно, после того как студент вытащил известный ему вопрос, число всех вопросов уменьшилось на единицу, и число известных студенту вопросов тоже уменьшилось на единицу. Используя формулу, получаем

$$P(A) = (20/25)(19/24) = 380/600 \approx 0{,}63.$$

Теорема 3. Вероятность появления события равна разности между 1 и вероятностью противоположного события:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Вероятность появления **хотя бы одного события из n несовместных** в совокупности равна разности между 1 и произведением вероятностей событий, противоположных данным:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})...P(\overline{A_n}).$$

Пример 7. Один лотерейный билет выигрывает с вероятностью 0,0001. Какова вероятность того, что владелец одного билета ничего не выиграет?

Пусть событие A означает выигрыш. Тогда $\overline{A}$ означает, что билет не выигрывает. По формуле получаем

$$P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{\overline{A}}) = 1 - 0{,}0001 = 0{,}9999.$$

Типовая задача 9. Задачу про стрелков можно решить другим способом, используя понятие противоположного события. Повторим условие задачи. Два стрелка стреляют в одну и ту же цель, причем вероятность поражения цели первым стрелком 0,8, а вторым стрелком 0,5. Оба стрелка стреляют по команде (то есть одновременно) один раз. Какова вероятность, что цель будет поражена хотя бы одним стрелком?

Решение. Обозначим события по-другому. Пусть A – поражение цели хотя бы одним стрелком, A_1 - попадание в цель первым стрелком, A_2 – вторым стрелком, $\overline{A}$ – промах обоих стрелков, $\overline{A_1}$ – промах первого стрелка, $\overline{A_2}$ – промах второго стрелка. Тогда $P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, $P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$. А вероятность самого события $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) = 1 - 0{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}9$.

Задача 8

1. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.
2. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.
3. В ящике 100 деталей, из которых 10 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей нет годных.
4. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сначала выбирают одну, а затем из оставшихся четырех вторую цифру. Предполагается, что все 20 возможных исходов

равновероятны. Найти вероятность того, что оба раза будет выбрана нечетная цифра.

5. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором три вопроса.
6. Из семи цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 выбирают две и составляют двузначное число. Событие A – обе цифры числа четные, событие B – обе цифры числа нечетные. Что означают события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A+B$? Найдите вероятности всех перечисленных событий.
7. Из семи цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 выбирают две и составляют двузначное число. Событие A – обе цифры числа четные, событие B – обе цифры числа нечетные. Что означают события $\overline{A+B}$, AB? Найдите вероятности всех перечисленных событий.
8. На экспертизу поступили три партии одинаковых золотых изделий – по 20 штук. В первой коробке было одно бракованное изделие, во второй – 2, в третьей – 4. Из каждой коробки наугад извлекают по одному бракованному изделию. Найти вероятность того, что все три изделия окажутся бракованными.
9. В партии 100 деталей. Из них 5 % брака. Для проверки берут пять деталей. Партию принимают, если среди проверяемых не более одной бракованной детали. Найти вероятность приема партии.
10. Одна из наиболее сложных проблем рыночных исследований – отказ потребителей отвечать на вопросы о потребительских предпочтениях, либо, если опрос проводится по месту жительства, – отсутствие их дома на момент опроса. Предположим, что исследователь рынка с вероятностью 0,94 верит, что респондент согласится отвечать на вопросы анкеты, если окажется дома. Он также полагает, что вероятность того, что этот человек будет дома, равна 0,65. Имея такие данные, оцените процент заполненных анкет.

Задача 9

1. В студии телевидения три телевизионных камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна 0,6. Какова вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера?
2. Какова вероятность того, что при бросании трех игральных костей шесть очков появится хотя бы на одной из костей?
3. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.
4. В ящике 10 деталей, среди которых 2 нестандартных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлеченных двух деталей есть хотя бы одна стандартная.
5. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить четыре бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны: 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.

6. Ведутся поиски четырех преступников. Каждый из них независимо от других может быть обнаружен в течение суток с вероятностью 0,5. Какова вероятность того, что в течение суток будет обнаружен хотя бы один преступник?
7. Три курсанта стреляют из пистолета по мишени. Вероятность поражения мишени для первого курсанта равна 0,7, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Найти вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один курсант.
8. Отдел маркетинга фирмы проводит опрос для выяснения мнения потребителей по определенному типу продуктов. Известно, что в местности, где проводятся исследования, 10 % населения являются потребителями интересующего фирму продукта и могут дать ему квалифицированную оценку. Компания случайным образом отбирает 10 человек из всего населения. Чему равна вероятность того, что, по крайней мере, один человек из них может квалифицированно оценить продукт?
9. Для рыночного исследования необходимо проведение интервью с людьми, которые добираются на работу общественным транспортом. В районе, где проводилось исследование, 75 % людей добираются на работу общественным транспортом. Если три человека согласны дать интервью, то чему равна вероятность того, что, по крайней мере, один из них добирается на работу общественным транспортом?
10. Как показывает практика, вероятность обнаружить наркотики в проходящих таможенный контроль машинах равна 0,003. Какова вероятность того, что наркотики будут обнаружены хотя бы в одной из пятисот проверенных машин?

§ 4. Первичная обработка данных

О возможностях статистики высказываются многие, и не всегда лестно, но используют все – это удобно и, в той или иной степени, обоснованно заменять порой необозримые числовые массивы двумя–тремя числами и/или рисунками.

Оценивая, к примеру, команду баскетболистов по росту одним числом, мы пользуемся средним ростом спортсменов. И нас не смущает, что среди них не оказывается ни одного, имеющего именно этот рост.

Нередко бывает важно знать не только среднее значение, но и насколько велики отклонения от него. И это удобнее всего описывать тоже одним числом.

Отчеты органов внутренних дел, как и любые другие документы, содержащие различные числовые данные, представляют собой огромный статистический материал (статистические данные). Он подвергается математической обработке. Результаты этой обработки представляют в виде таблиц, графиков, диаграмм и различных числовых характеристик, которые называются параметрами. Важнейшие из них *среднее арифметическое* и *дисперсия*.

Под *статистическими данными* понимается некоторая совокупность чисел, представляющих собой количественные характеристики изучаемых процессов или явлений. Статистические данные получаются в результате специально поставленных исследований или опытов. Например, полученная совокупность чисел по количеству совершенных правонарушений представляет собой некоторые статистические данные.

4.1. Вариационный (дискретный) ряд

Начнем с примера.

Пример 1. УВД города Дрюкова опубликовало сводку о числе правонарушений, совершенных подростками за первые 20 дней сентября: 8, 6, 13, 4, 13, 13, 12, 9, 7, 6, 12, 14, 13, 12, 17, 6, 8, 12, 7, 12.

Некоторый признак X - число правонарушений в день, принимает значение $x_1, x_2, ..., x_{20}$. Различных чисел среди заданных – девять. Обозначим их $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, ..., \widetilde{x}_9$. Подсчитаем число дней с одним и тем же значением признака (одинаковым числом преступлений) и обозначим эту величину m_i. Тогда $m_1 = 1, m_2 = 3, m_3 = 2, m_4 = 2$ и так далее. Эти числа называются **частотой** признака.

По этим данным составим таблицу:

$\widetilde{x}_i$	4	6	7	8	9	12	13	14	17
m_i	1	3	2	2	1	5	4	1	1

Заметим, что в первой строчке все числа располагаются в порядке возрастания, а сумма чисел второй строки равна общему числу дней (числу всех наблюдаемых значений признака).

Таблицу можно переписать, так, чтобы в ней не содержалась информация о числе дней, в течение которых проводились наблюдения. Заменим в таблице вторую строку на новую, которую составим так: вместо числа дней поставим долю, которую это число составляет от числа всех дней. Эта доля называется **относительной частотой**. Так как число всех дней 20, то 1 заменим на 1/20=0,05. 3 – на 3/20=0,15 и так далее. В результате таблица примет вид

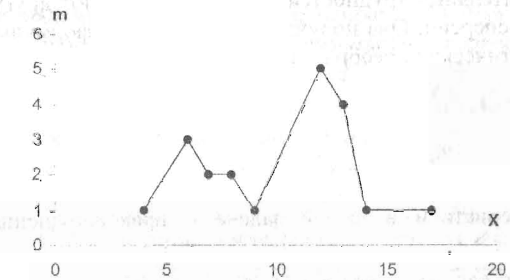
$\widetilde{x}_i$	4	6	7	8	9	12	13	14	17
p_i	0,05	0,15	0,10	0,10	0,05	0,25	0,20	0,05	0,05

Заметим, что сумма чисел, стоящих во второй строке, равна единице. Относительная частота вычисляется по формулам

$$p_1 = \frac{m_1}{n},\ p_2 = \frac{m_2}{n}, \ldots, p_9 = \frac{m_9}{n}.$$

Ряд значений признака, расположенных в порядке возрастания с соответствующими весами (частотой или относительной частотой), называется **дискретным вариационным рядом.**

Дискретный вариационный ряд графически можно представить с помощью **полигона распределения частот:**



Вычислим среднее число правонарушений в день. Среднюю величину обычно называют **средним арифметическим** и обозначают $\bar{x}$.

Формула для подсчета среднего арифметического

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) =$$

$$= \frac{1}{n}(\widetilde{x}_1 m_1 + \widetilde{x}_2 m_2 + \ldots + \widetilde{x}_k m_k) = \widetilde{x}_1 p_1 + \widetilde{x}_2 p_2 + \ldots + \widetilde{x}_k p_k.$$

Воспользовавшись формулой, получаем

$$\bar{x} = \frac{1}{20}(4+6+6+6+7+7+8+8+9+12+12+12+12+12+13+13+13+13+14+17) =$$

$$= \frac{1}{20}(4\cdot1+6\cdot3+7\cdot2+8\cdot2+9\cdot1+12\cdot5+13\cdot4+14\cdot1+17\cdot1) = 4\cdot0{,}05+6\cdot0{,}15+7\cdot0{,}10+$$

$$+8\cdot0{,}10+9\cdot0{,}05+12\cdot0{,}25+13\cdot0{,}20+14\cdot0{,}05+17\cdot0{,}05 = \frac{1}{20}204 = 10{,}2.$$

Можно пользоваться любой формулой, в зависимости от того, в каком виде представлены данные.

Среднее число правонарушений в год является вполне удовлетворительным показателем для описания ситуации в городе. Однако весьма часто встречаются ситуации, когда помимо среднего значения нужно знать еще и то, как заданные числа рассеяны около их среднего значения.

Для этой цели вводятся *дисперсия* и *среднее квадратическое отклонение*.

Дисперсией величин $x_1, x_2, ..., x_n$ называется число

$$D = \frac{1}{n}\left((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2\right) =$$

$$= \frac{m_1}{n}(\widetilde{x}_1 - \bar{x})^2 + \frac{m_2}{n}(\widetilde{x}_2 - \bar{x})^2 + \ldots + \frac{m_k}{n}(\widetilde{x}_k - \bar{x})^2 =$$

$$= p_1(\widetilde{x}_1 - \bar{x})^2 + p_2(\widetilde{x}_2 - \bar{x})^2 + \ldots + p_k(\widetilde{x}_k - \bar{x})^2.$$

Средним квадратическим отклонением величин $x_1, x_2, ..., x_n$ от их среднего значения $\bar{x}$ называется величина

$$S = \sqrt{D}.$$

Чтобы избежать вычислительных трудностей, обычно используют другую формулу для определения дисперсии. Она получается из основной формулы в результате некоторых математических преобразований:

$$D=\frac{1}{n}\left((x_1)^2+(x_2)^2+\ldots+(x_n)^2\right)-\bar{x}^2=$$

$$=\frac{m_1}{n}(\tilde{x}_1)^2+\frac{m_2}{n}(\tilde{x}_2)^2+\ldots+\frac{m_k}{n}(\tilde{x}_k)^2-\bar{x}^2.$$

Вычислим эти характеристики в нашей задаче о правонарушениях подростков:

$$D=\frac{1}{20}\left(4^2+6^2+6^2+6^2+7^2+7^2+8^2+8^2+9^2+12^2+12^2+12^2+\right.$$

$$\left.+12^2+12^2+13^2+13^2+13^2+13^2+14^2+17^2\right)-10{,}2^2=11{,}56;$$

$$S=\sqrt{11{,}56}=3{,}4.$$

Или по другой формуле:

$$D=\frac{1}{20}4^2+\frac{3}{20}6^2+\frac{2}{20}7^2+\frac{2}{20}8^2+\frac{1}{20}9^2+\frac{5}{20}12^2+\frac{4}{20}13^2+\frac{1}{20}14^2+$$

$$+\frac{1}{20}17^2-10{,}2^2=11{,}56.$$

4.2. Интервальный вариационный ряд

При обработке большого числа экспериментальных данных их предварительно группируют и оформляют в виде так называемого *интервального вариационного ряда.*

Поясним на примере.

Пример 2. Средняя месячная зарплата за год каждого из пятидесяти случайно отобранных работников хозяйства такова:

317, 304, 230, 285, 290, 320, 262, 274, 205, 180, 234, 221, 241, 270, 257, 290, 258, 296, 301, 150, 160, 210, 235, 308, 240, 370, 180, 244, 365, 130, 170, 250, 370, 267, 288, 231, 253, 315, 201, 256, 279, 285, 226, 367, 247, 252, 320, 160, 215, 350.

Здесь признак X – средняя месячная зарплата. Как видно из приведенных данных, наименьшее значение величины X равно 130, а наибольшее – 370. Таким образом, диапазон наблюдений представляет собой интервал 130-370, длина которого равна 370-130=240.

Разобьем диапазон наблюдений на части (разряды) так. Например, разделим интервал 130-370 на 6 равных частей, тогда длина каждого разряда будет 40. Границами разрядов будут числа 130, 170, 210, 250, 290, 330, 370. Подсчитаем число значений, попавших в каждый разряд. Например, в первый разряд попадают следующие числа: 150 (1 раз), 160 (2 раза), 130 (1 раз), 170 (1 раз). Поскольку число 170 находится на границе между первым и вторым

разрядами, мы включим его, например, в первый разряд. Сложив кратности (частоту попадания), мы получим **частоту** первого разряда:

$$m_1=1+2+1+1=5.$$

Разделив частоту на число n всех наблюдений, получим **относительную частоту** p_1 попаданий значений признака X в первый разряд:

$$p_1=\frac{m_1}{n}=\frac{5}{50}=0{,}1.$$

Проделав вычисления для всех разрядов, мы получим следующую таблицу:

	130-170	170-210	210-250	250-290	290-330	330-370
m_i	5	5	12	14	9	5
p_i	0,1	0,1	0,24	0,28	0,18	0,1

Таблица, в которой представлены значения признака, заданные промежутками (интервалами), с соответствующими весами (частотой или относительной частотой), называется **интервальным вариационным рядом.**

Сумма всех частот в таблице равна числу всех наблюдаемых значений признака X:

$$5+5+12+14+9+5=50.$$

Это свойство используется для проверки правильности вычислений. Из него следует, что сумма всех относительных частот равна единице:

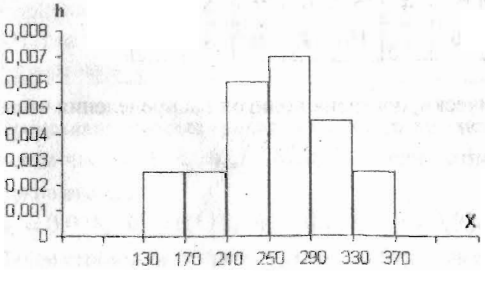
$$0{,}1+0{,}1+0{,}24+0{,}28+0{,}18+0{,}1=1$$ 0,1+0,1+0,24+0,28+0,18+0,1=1.

Интервальный ряд изображается графически в виде **гистограммы,** которая строится так. Сначала вычисляют плотности частот $h_1, h_2, h_3, \ldots$, разделив относительную частоту каждого разряда на его длину:

$$h_1=\frac{0{,}1}{40}=0{,}0025,\ h_2=\frac{0{,}1}{40}=0{,}0025,\ h_3=\frac{0{,}24}{40}=0{,}006,$$

$$h_4=\frac{0{,}28}{40}=0{,}007,\ h_5=\frac{0{,}18}{40}=0{,}0045,\ h_6=\frac{0{,}1}{40}=0{,}0025.$$

Затем выбирают на плоскости систему координат и откладывают на оси X значения 130, 170, 210,..., соответствующие границам разрядов. На каждом из отрезков длины 40, как на основании, строят прямоугольник, высота которого равна плотности частоты соответствующего разряда. Полученная фигура и называется **гистограммой:**



Как уже отмечалось, интервальный ряд составляют при обработке больших массивов информации. В таких случаях отдельные значения признака X не фиксируются. Поэтому сразу воспользоваться уже приведенными формулами для определения среднего арифметического, дисперсии и среднего квадратического отклонения не удастся. Для этого сначала находят середины разрядов: $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, ..., \widetilde{x}_k$ (здесь k – число всех разрядов интервального ряда). Середину разряда вычисляют как полусумму его границ. А далее можно воспользоваться теми же формулами. Напомним их:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(\widetilde{x}_1 m_1 + \widetilde{x}_2 m_2 + ... + \widetilde{x}_k m_k) = \widetilde{x}_1 p_1 + \widetilde{x}_2 p_2 + ... + \widetilde{x}_k p_k,$$

$$D = \frac{m_1}{n}(\widetilde{x}_1)^2 + \frac{m_2}{n}(\widetilde{x}_2)^2 + ... + \frac{m_k}{n}(\widetilde{x}_k)^2 - \bar{x}^2 =$$

$$= p_1(\widetilde{x}_1)^2 + p_2(\widetilde{x})^2 + ... + p_k(\widetilde{x})^2 - \bar{x}^2, \qquad S = \sqrt{D}.$$

Вычислим эти числовые характеристики для нашей задачи:

$$\bar{x} = \frac{1}{50}(150 \cdot 5 + 190 \cdot 5 + 230 \cdot 12 + 270 \cdot 14 + 310 \cdot 9 + 350 \cdot 5) = \text{(или)}$$

$$150 \cdot 0{,}1 + 190 \cdot 0{,}1 + 230 \cdot 0{,}24 + 270 \cdot 0{,}28 + 310 \cdot 0{,}18 + 350 \cdot 0{,}1 = 255{,}6;$$

$$D = \frac{5}{50}150^2 + \frac{5}{50}190^2 + \frac{12}{50}230^2 + \frac{14}{50}270^2 + \frac{9}{50}310^2 + \frac{5}{50}350^2 - (255{,}6)^2 =$$

$$= 0{,}1 \cdot 150^2 + 0{,}1 \cdot 190^2 + 0{,}24 \cdot 230^2 + 0{,}28 \cdot 270^2 + 0{,}18 \cdot 310^2 + 0{,}1 \cdot 350^2 -$$

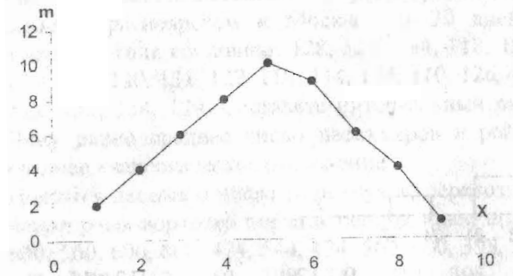
$$-(255{,}6)^2 = 3184{,}64; \quad S = \sqrt{3184{,}64} = 56{,}43.$$

Типовая задача 10 (пример). При обследовании 50 семей установлено следующее количество членов семьи: 5, 3, 2, 1, 4, 6, 3, 7, 9, 1, 3, 2, 5, 6, 8, 2, 5, 2, 3, 6, 8, 3, 4, 4, 5, 6, 5, 4, 7, 5, 6, 4, 8, 7, 4, 5, 7, 8, 6, 5, 7, 5, 6, 6, 7, 3, 4, 6, 5, 4. Составьте вариационный ряд, постройте полигон распределения частот, определите средний размер (среднее число членов) семьи, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. Построим дискретный вариационный ряд. Значения изучаемого признака – размера семьи – обозначим x_i, частоты - m_i:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_i	2	4	6	8	10	9	6	4	1

Представим данные графически, построив полигон распределения частот:



Рассчитаем средний размер (среднее число членов) семьи:

$$\bar{x} = \frac{1}{50}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 9 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 4 + 9 \cdot 1) = \frac{253}{50} = 5{,}06$$

$$D = \frac{1}{50}(1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 4 + 3^2 \cdot 6 + 4^2 \cdot 8 + 5^2 \cdot 10 + 6^2 \cdot 9 +$$

$$+ 7^2 \cdot 6 + 8^2 \cdot 4 + 9^2 \cdot 1) - (5{,}06)^2 \approx 2{,}5 \qquad S = \sqrt{2{,}5} = 1{,}58.$$

Типовая задача 10 (пример). Менеджер большого универмага записал данные о числе продаж 26 случайно выбранных продавцов этого универмага: 16, 12, 15, 15, 23, 9, 15, 13, 14, 14, 21, 15, 14, 17, 27, 15, 16, 12, 16, 19, 14, 16, 17, 13, 14, 14.

Составьте интервальный ряд, постройте гистограмму, определите среднее число продаж, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. Преобразуем данные в интервальный ряд. Для выбора оптимальной величины интервала применяют **формулу Стэрджеса**

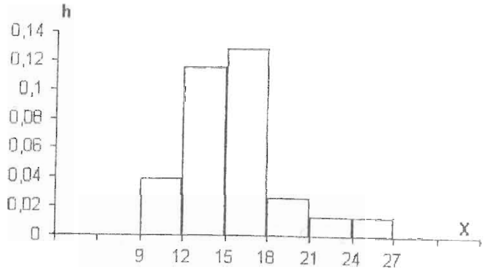
$k = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}322 \lg n}$, где n – число единиц совокупности, $x_{\max}, x_{\min}$ – наибольшее и наименьшее значение признака соответственно. Тогда для наших данных имеем $k = \dfrac{27 - 9}{1 + 3{,}3221 \lg 26} = 3{,}095 \approx 3$. Преобразованные в интервальный ряд данные имеют вид

Интервалы продаж	9-12	12-15	15-18	18-21	21-24	24-27
Число продавцов	3	9	10	2	1	1

Представим данные графически, построив гистограмму. Сначала вычислим плотности частот $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6$, разделив относительную частоту каждого разряда на его длину:

$h_1 = 0{,}038$, $h_2 = 0{,}115$, $h_3 = 0{,}128$, $h_4 = 0{,}026$, $h_5 = 0{,}013$, $h_6 = 0{,}013$.

Далее строим гистограмму, которая будет иметь вид



Определим середины разрядов: $\tilde{x}_1 = \dfrac{9+12}{2} = 10{,}5$; $\tilde{x}_2 = \dfrac{12+15}{2} = 13{,}5$;

$\tilde{x}_3 = \dfrac{15+18}{2} = 16{,}5$; $\tilde{x}_4 = \dfrac{18+21}{2} = 19{,}5$; $\tilde{x}_5 = \dfrac{21+24}{2} = 22{,}5$;

$\tilde{x}_6 = \dfrac{24+27}{2} = 25{,}5.$

Рассчитаем среднее число продаж:

$$\tilde{x} = \frac{1}{26}(10{,}5\cdot 3 + 13{,}5\cdot 9 + 16{,}5\cdot 10 + 19{,}5\cdot 2 + 22{,}5\cdot 1 + 25{,}5\cdot 1) = 15{,}58.$$

Определим дисперсию:

$$D = \frac{1}{26}(10{,}5^2\cdot 3 + 13{,}5^2\cdot 9 + 16{,}5^2\cdot 10 + 19{,}5^2\cdot 2 +$$

$$+ 22{,}5^2\cdot 1 + 25{,}5^2\cdot 1) - 15{,}58^2 = 11{,}51, \qquad S = \sqrt{11{,}51} = 3{,}4.$$

Задача 10

1. Для проведения демографических исследований выбрали 50 семей и получили следующие данные о количестве членов семьи: 2, 5, 3, 4, 1, 3, 2, 4, 6, 2, 3, 3, 4, 5, 2, 3, 1, 4, 4, 3, 5, 5, 3, 4, 4, 3, 3, 4, 4, 3, 2, 5, 3, 1, 4, 3, 4, 2, 6, 3, 2, 3, 1, 6, 4, 3, 3, 2. Составьте вариационный ряд, постройте полигон распределения частот, найдите числовые характеристики – среднее арифметическое, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.
2. Управление сельского хозяйства представило сводку по сорока хозяйствам. Согласно этой сводке урожайность ржи в них составила (в центнерах с гектара):

17,5	18,6	19,1	19,9	20,6	20,1	22	21,4	17,5	18,5
19	20	22	20,6	19,1	18,6	19,1	22	19	17,5
22	22,6	21	19	18,3	20,1	18,5	20	20,6	21,4
21	20	20	18	18	17,5	19,1	20,6	17,5	18,6

Постройте интервальный ряд, гистограмму, найдите числовые характеристики – среднее арифметическое, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

3. Число пассажиров компании «Красноярские авиалинии» одного из рейсов между Красноярском и Москвой за 30 дней между апрелем и маем текущего года составило: 128, 121, 134, 118, 123, 109, 120, 116, 125, 128, 121, 129, 130, 131, 127, 119, 114, 124, 110, 126, 134, 125, 128, 123, 128, 133, 132, 136, 134, 129. Составьте интервальный ряд, постройте гистограмму. Чему равно среднее число пассажиров в рейсе? Найдите дисперсию и среднее квадратическое отклонение.
4. Имеются данные о числе тонн грузов, перевозимых еженедельно паромом некоторого морского порта в период навигации: 398, 412, 560, 474, 544, 600, 560, 600, 600, 474, 544, 474, 560, 600, 398, 560, 412, 600, 474, 474, 560, 600, 398, 412, 560, 398, 544, 412, 398, 600, 412, 560. Составьте вариационный ряд, постройте полигон распределения частот, найдите числовые характеристики – среднее арифметическое, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.
5. По данным выборочного обследования получено следующее распределение семей по среднедушевому доходу:

Среднедушевой доход семьи в месяц, у. е.	До 25	25–50	50 – 75	75 – 100	100 – 125	125 – 150	150 – 175
Количество обследованных семей	46	236	250	176	102	78	12

Постройте гистограмму распределения частот. Найдите среднедушевой доход семьи в выборке, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

6. По данным выборочного обследования получено следующее распределение заработной платы работников одного из цехов промышленного предприятия:

Заработная плата, у.е.	50 – 75	75 – 100	100 – 125	125 – 150	150 – 175	175 – 200
Число работников	12	23	37	19	15	9

Постройте гистограмму распределения частот. Найдите среднюю заработную плату в выборке, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

7. Имеются выборочные данные о числе сделок, заключенных брокерскими фирмами и конторами города в течение месяца:

Число заключенных сделок	10 – 30	30 – 50	50 – 70	70 – 90
Число брокерских фирм и контор	20	18	12	5

Постройте гистограмму распределения частот. Найдите среднее число заключенных сделок, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

8. Чтобы выяснить, какие суммы тратят студенты второго курса в течение месяца, питаясь в кафе университета, был проведен опрос 10 случайно отобранных студентов, который дал следующие результаты: 22, 17, 28, 31, 19, 15, 15, 22, 28, 11. Составьте вариационный ряд, постройте полигон распределения частот, найдите числовые характеристики – среднее арифметическое, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.
9. В отделе дамской обуви универмага в течение дня были проданы туфли следующих размеров: 37, 35, 36, 37, 38, 37, 36, 37, 39, 38, 37, 36, 37, 37, 36. Составьте вариационный ряд, постройте полигон распределения частот, найдите числовые характеристики – среднее арифметическое, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.
10. Ежегодно американский журнал «Fortune» публикует список наиболее богатых людей в мире с оценками их состояний в миллиардах долларов. Ниже приведены результаты одной из публикаций за 1989 г.: 25,0; 20,9; 8,7; 7,5; 7,4; 6,0; 5,7; 5,5; 5,0; 5,0; 4,4; 4,0; 3,6; 3,4; 3,1; 3,0; 3,0; 2,9; 2,8; 2,8; 2,5; 2,5; 2,5; 2,4; 2,4; 2,4; 2,2; 2,0; 2,0; 2,0; 1,9; 1,8; 1,7; 1,6; 1,5; 1,5; 1,5; 1,5; 1,4; 1,3; 1,3; 1,3; 1,2; 1,2; 1,2; 1,2; 1,1; 1,14; 1,1; 1,0; 1,0; 1,0; 1,0; 1,0; 1,0; 1,0. 1,0. Постройте интервальный ряд, гистограмму, найдите числовые характеристики – среднее арифметическое, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Список литературы

Основная

1. Грес П.В. Математика для гуманитариев: Учеб. пособие / П.В. Грес. М.: Юрайт, 2000.
2. Богатов Д.Ф. Основы информатики и математики для юристов: Учеб. пособие. Т.II /Д.Ф. Богатов, Ф.Г. Богатов. М: ПРИОР, 2000.
3. Тихомиров Н.Б. Математика: Учебный курс для юристов / Н.Б. Тихомиров, А.М. Шелехов. М.: Юрайт, 2000.
4. Ниворожкина Л.И. Основы статистики с элементами теории вероятностей /Л.И. Ниворожкина, З.А. Морозова. Ростов н/Д: Феникс, 1999.
5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. М.: Высш. шк., 1999.
6. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики / В.Е. Гмурман. М.: Высш. шк., 1999.

Дополнительная

1. Шикин Е.В. Гуманитариям о математике / Е.В. Шикин, Г.Е. Шикина. М.: Агар, 1999.
2. Информатика и математика для юристов: Учеб. пособие для вузов/Под ред. Х.А. Андриашина, С.Я. Казанцева. М.: ЮНИТИ-ДАНА, Закон и право, 2001.
3. Клайн М. Математика. Утрата определенности / М. Клайн. М.: Мир, 1984.